1. Analysis
    a. Zahlenfolgen
    b. Kurvendiskussion
        i. Achsenschnittpunkte
        ii. Definitionsbereich/-lücken
        iii. Monotonie von Funktion
        iv. Symmetrie von Funktionen
        v. Hoch Tief und Wendepunkte
        vi. Verhalten im Unendlichen
    c. Funktionen
        i. Quadratische Funktionen
            1. Grundlegender Aufbau
            2. Scheitelpunktform
            3. Scheitelpunktform bilden
        ii. Funktionsscharen
    d. Differentialrechnung
        i. Ableitungen
            1. Kettenregel
            2. Produktregel
            3. Quotientenregel
        ii. Tangenten
        iii. Schnittwinkel
        iv. Berührpunkte
        v. Mittlere und lokale Steigung
        vi. Grenzwerte und Stetigkeiten
    e. Integralrechnung
        i. Stammfunktion
            1. Integrale Bilden
            2. Sonderfälle
            3. Verkettete Funktionen
            4. Grundintegrale
        ii. Grund Integrale
        iii. Anwendung der Integralrechnung
        iv. Fläche zwischen Funktionen
        v. Volumen von Rotationskörpern
2. Analytische Geometrie
    a. Vektorrechnung
        i. Skalarprodukt
        ii. Betrag eines Vektors
        iii. Normalenvektor
        iv. Geradengleichung
        v. Ebenengleichung
        vi. Winkel zwischen Vektoren
        vii. Winkel gerade Ebnen
    b. Legebeziehungen
        i. Gerade – Gerade
        ii. Gerade – Ebene
        iii. Ebene - Ebene
    c. Abstände

    d. Trigonometrie
        i. Seitenlängen/Flächen
        ii. Winkel Bestimmung
3. Stochastik
    a. Grundlagen und Grundbegriffe der Stochastik
        i. Schnitt, Vereinigung, Komplement und Venn-Diagramm von Ereignismengen
        ii. Laplace-Experiment
        iii. Baumdiagramm
    b. Kombinatorik
        i. Permutation
        ii. Variation
        iii. Kombination
    c. Zufallsgrößen
        i. Erwartungswert und Varianz
        ii. Wahrscheinlichkeitsverteilung endlicher Zufallsgrößen
    d. Binomialverteilung
        i. Bernoulli-Ketten
    e. Abhängige Wahrscheinlichkeiten
        i. Absolute Wahrscheinlichkeit
        ii. Der Satz von Bayes
4. Weiteres
    a. Binomische Formeln
    b. Quadratische Ergänzung
    c. Umformungsregeln
        i. Brüche Umformen
        ii. Potenz und Wurzelgesetze

Analysis

Kurvendiskussion

Achsenschnittpunkte

Mit X-Achse (nullstelle)

$f(x) = 0 \ \rightarrow \ SP_X(x\,|0)$

Mit Y-Achse

$SP_Y(0 \mid f(0)\,)$

Definitionsbereich/ - Lücken

Gebrochen rationale Funktionen

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ wenn: $v(x) = 0$ entsteht eine Polstelle also eine Definitionslücke

Wurzel Funktionen

$f(x) = \sqrt{v(x)}$ wenn: $v(x) < 0$ entsteht ein nicht definierter Bereich da man keine wurzeln aus negativen zahlen ziehen kann

Symmetrie von Funktionen

Achsen Symmetrie (an der Y-Achse)

Ist gegeben, wenn: $f(x) = f(-x)$

Punkt Symmetrie (vom Koordinaten-Ursprung)

Ist gegeben, wenn: $f(x) = -f(-x)$

Funktionen verschieben (wenn z.B. Symmetrie an anderem Punkt oder Achse gefordert ist)

<u>Auf der Y-Achse:</u>

w = Wert um den nach oben verschoben werden soll

$f(x) = ax^2 + \boldsymbol{w}$

<u>Auf der X-Achse:</u>

w = Wert um den nach rechts verschoben werden soll

$f(x) = a(\boldsymbol{w} - x)^2$

Monotonie von Funktionen

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall I differenzierbar so ist sie

Monoton steigend

Wenn: $x \in I\,,\; f'(x) \geq 0$

Monoton fallend

Wenn: $x \in I\,,\; f'(x) \leq 0$

Hoch, Tief und Wendepunkte

Hoch- und Tief-Punkte bestimmen

1. Bilde f'(x): Zuerst leitest du die Funktion ab.
2. Setze f'(x) = 0: Dann musst du die Nullstellen x_n deiner Ableitung bestimmen. Das sind dann die x-Werte deiner möglichen Hoch- oder Tiefpunkte.

3. Berechne den y-Wert: Für den y-Wert setzt du die Nullstelle x_n deiner Ableitung in f(x) ein.

Jetzt hast du einen möglichen Hoch- und Tiefpunkt berechnet. Willst du testen, ob es sich um einen Hochpunkt oder Tiefpunkt handelt, brauchst du die zweite Ableitung f''(x). In die setzt du die Nullstelle x_n der ersten Ableitung ein:

- Ist f''(x_n) < 0, dann handelt es sich um einen Hochpunkt
- Ist f''(x_n) > 0, dann hast du einen Tiefpunkt

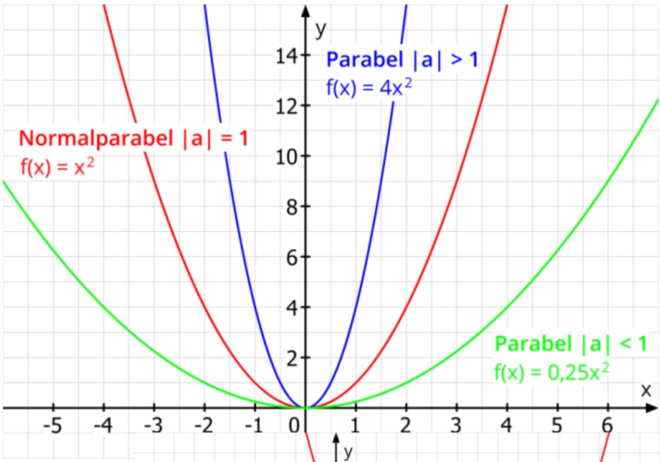
Wendepunkt

An einem Wendepunkt $\mathrm{WP}(x_w \,|\, f(x_w))$ der Funktion $f(x)$ gilt: $\boldsymbol{f''(x_w) = 0}$ und $\boldsymbol{f'''(x_w) \neq 0}$

Verhalten im Unendlichen

Funktionen

Quadratische Funktionen

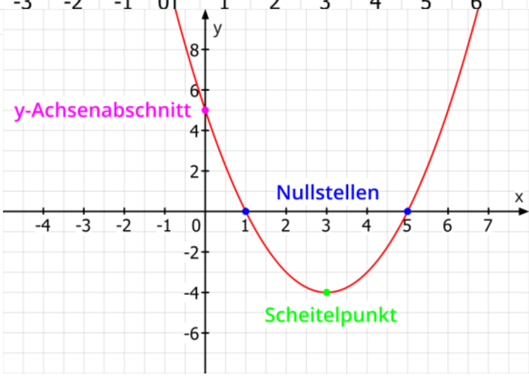


Grundlegender Aufbau

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Somit ist die quadratische Funktion ein Funktion 2. Grades

$Bsp: f(x) = 3x^2 - 2x + 5$



Scheitelpunktform

$f(x) = a(x-d)^2 + e$

Der Scheitelpunkt befindet sich jetzt an dem Punkt: $S(+d|e)$

Scheitelpunktform bilden

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. (wenn a vorhanden) Ausklammern um a zu entfernen und mit Term in der Klammer arbeiten

   $f(x) = a \times \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

3. *b* wird quadratisch ergänzt

   $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = q$

4. *q* wird Jetz in die Funktionsgleichung eingefügt

$f(x) = x^2 + bx + q - q + c$

5. jetzt kann man es mithilfe einer binomischen Formel umwandeln

$f(x) = a\left(x - \sqrt{q}\right)^2 + (-q + c)$

$Bsp: f(x) = x^2 - 2x + 5 \rightarrow (x-1)^2 + 4$

Differentialrechnung

Ableiten

Wurzel als Potenz

$$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$$

$f(x) = 2x^2 \rightarrow F(x) = 4x$

$\mathrm{f(x)} = ax^y \rightarrow \mathrm{F(x)} = a \times yx^{y-1}$

Verkettete Ableitung

$$f(x) = a\big(i(x)\big)$$

$$f'(x) = a'\big(i(x)\big) \times i'(x)$$

Bsp.

$$f(x) = 3 \times (x2 + 4)^3$$

$$f'(x) = 9 \times (x2 + 4)^2 \times x$$

Wird Abgeleitet

Bleibt gleich

Multipliziert mit innerer abgeleiteter Funktion

Produktregel

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

$$f(x) = u'(x) \times u(x) + v'(x) \times v(x)$$

Quotientenregel

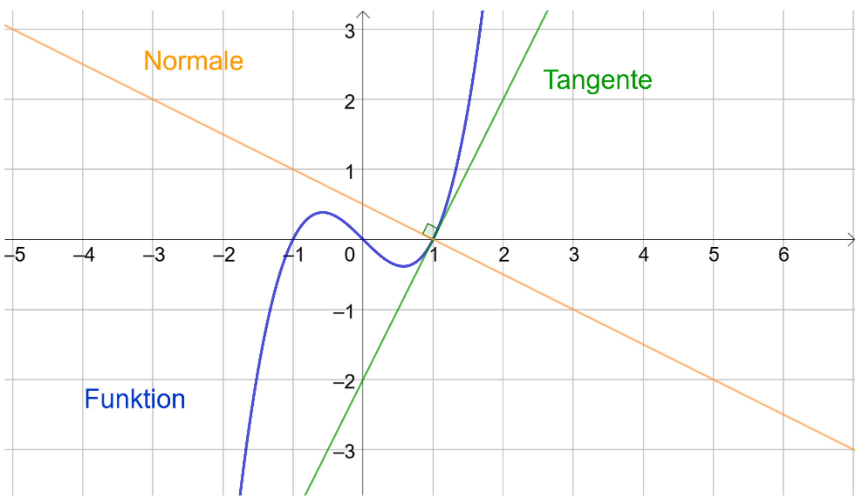
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x) = \frac{u'(x) \times -v'(x) \times u(x)}{v^2(x)}$$

Tangenten

x_b ist der Punkt der Funktion durch den die Tangente gehen soll

t(x) ist die Funktion der Tangente



m = anstieg = $f'(x_b)$

z = $f(x_b) - mx_b$

$$t(x) = mx + z$$

Schnittwinkel

Schnittstelle x_s der Funktion bestimmen durch gleichsetzen

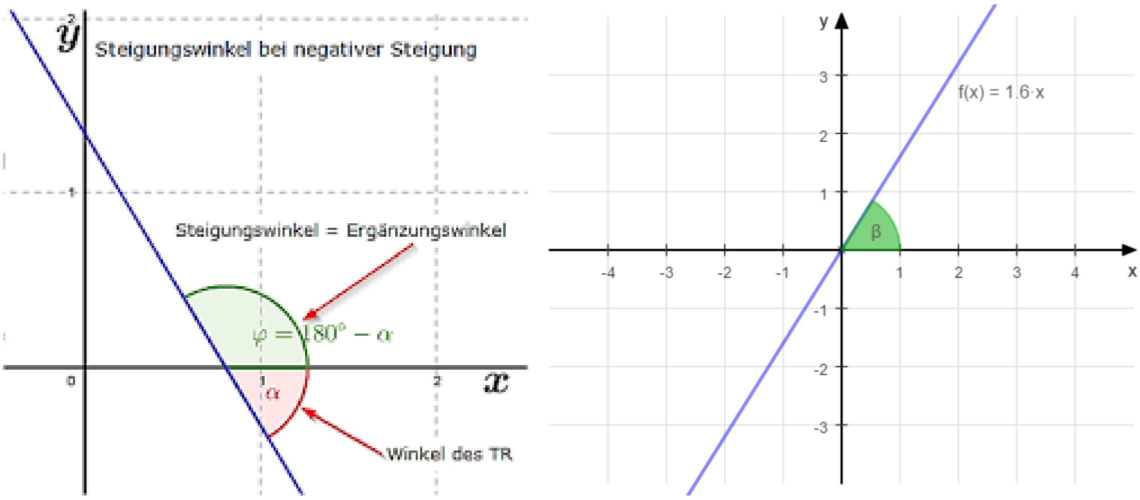
$f(x) = g(x) \rightarrow\ x_s$

Steigungswinkel der Funktionen bilden

$\alpha_f = \tan^{-1}(f'(x_s))$

$\alpha_g = \tan^{-1}(g'(x_s))$

Steigungswinkel ist immer der kleinere Winkel mit der X-Achse rechts vom Schnittpunkt



Beide Tangenten steigen

Größerer Winkel minus kleineren

$a_f - a_g = \alpha$

Beide Tangenten Fallen

$a_f - a_g = \alpha$

Eine Tangente steigt eine fällt

$|a_f| + |a_g| = \alpha$

Berührpunkte

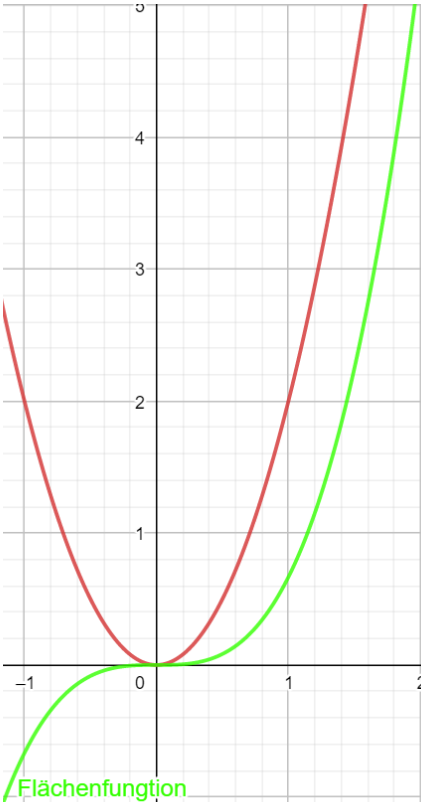
Gegeben wenn erfüllt:

1. $f(x) = g(x)$
2. $f'(x) = g'(x)$

Mittlere und lokale Steigung

Integralrechnung

Stammfunktion (Aufleiten/integrieren)



Integrale bilden (Aufleiten)

<u>Unbestimmtes Integral</u>

$$f(x) = 2x^2 \rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + c$$

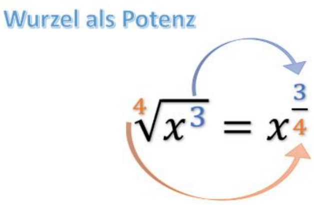
$$\mathrm{F(x)} = \frac{1}{y+1} \times x^{y+1} + c$$

<u>Bestimmtes Integral</u>

Wenn C ein wert hat handelt es sich um ein Bestimmtes Integral

Bsp.

$$f(x) = 2x^2 \rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1$$



Sonderfälle

Lineare Substitution (verkettete Funktionen Aufleiten)

Bsp. Innere Funktion Äußere Funktion

$3 \times (5x^3 + 5)^3$

$$3 \times (5x^3 + 5)^3 \rightarrow \frac{3}{15x^2 \times 4} \times (5x^3 + 5)^4$$

1. Klammer Bleibt
2. Geht in Zähler
3. Wird Aufgeleitet und geht in Nenner und Klammer-Exponenten
4. Wird Abgeleitet und geht in den Nenner

Grund Integrale

$$\int a \times dx = ax + c$$

$$\int x\,dx = 0{,}5\ \times x^2 + c$$

$$\int e^{nx}\,dx = \frac{1}{n}e^{nx} + C$$

$$\int\ x^n\,dx = \frac{x^n + 1}{n + 1} + c$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln\ |x| + c$$

$$\int a^x\ \ dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$$

$$\int \ln x\ \ dx = x \times\ \ln|x| - x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

Anwendung von Integralrechnung

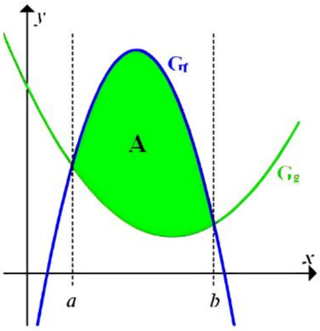
Ober und Unter G sind die Grenzen in der die Fläche berechnet werden soll (Y Koordinate).

$$\int_a^b f(x)dx = [\ F(x)\ ]_a^b = A$$

$F(b) - F(a)$ = A

Flächen zwischen zwei Funktionen

Haupt Fläche bestimmen und alle weiteren rausrechnen



$$A_{grün} = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_{grün} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Obere Funktion − Untere Funktion

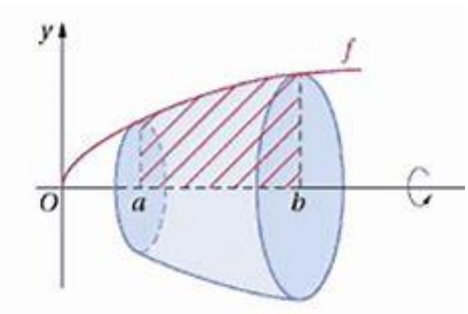
Abb Die Graphen G_f und G_g schließen das Flächenstuck A ein

Rotationskörper

Volumen Rotationskörper:

muss auf X-Achse liegen für die Berechnung!

$$\pi \times \int_a^b [f(x)]^2 dx = [\ F(x)\ ]_a^b = V$$



Von Y-Achse auf Y-Achse Drehen

Kehr Funktion der Ausgangsfunktion nehmen

Analytische Geometrie

Vektorrechnung

Skalarprodukt

<u>Berechnung:</u>

Wenn: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{a_3}\overrightarrow{b_3}$

<u>Eigenschaften:</u>

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Orthogonal so ist

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Betrag eines Vektors

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Entspricht der **Länge eines Vektors**

Normalenvektor

Ist das Kreutz Produkt aus zwei Vektoren, dessen Eigenschaft es ist orthogonal/senkrecht zu den zwei Vektoren zu sein oder zu der ebene die sie Aufspannen

<u>Berechnung:</u>

$+ \quad -$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

Geradengleichungen

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ortsvektor: Vektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt der Gerade

Richtungsvektor: Ein Vektor der die Richtung der Gerade angibt

Parameter: benötigt um mit Ortsvektor und der Verlängerung/Verkürzung des Richtungsvektor jeden Punkt der Gerade zu erreichen

Ebenengleichungen

Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ortsvektor: Vektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt der Ebene

Richtungsvektoren: Zwei Vektoren die Einen Ebene zwischen sich aufspanne

Parameter: benötigt um mit Ortsvektor und der Verlängerung/Verkürzung der Richtungsvektoren jeden Punkt der ebnen zu erreichen

Koordinatenform:

$$E: \vec{x} = n_1 x + n_2 y + n_3 z = a$$

Koordinaten des Normalenvektors der Ebene

Koordinaten eines Punkts der Ebene

Ebenen Variable: wird bestimmt in dem man einen Punkt der ebene in X Y Z einsetzt und die Gleichung Löst

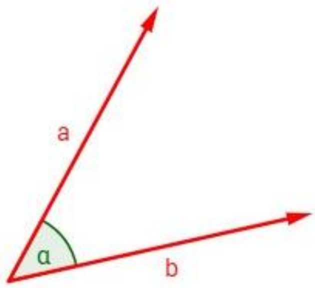
Normalenform: (für Abstands Rechnungen)

$$E: (\vec{x} - \vec{P}) \cdot \vec{n} = 0$$

Normalenvektor der Ebene

Ortsvektor eines Punktes der ebene

Winkel zwischen Vektoren



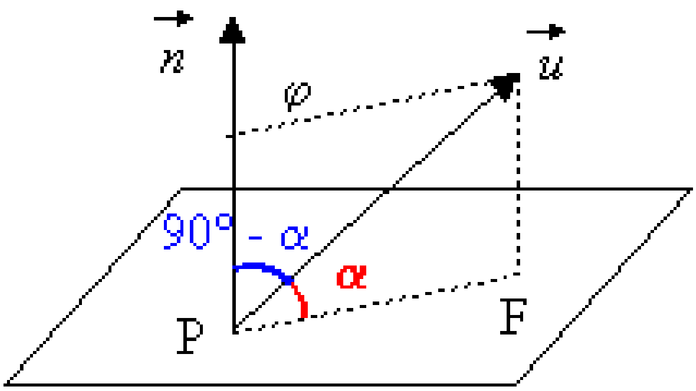
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

α Ist der Winkel zwischen zwei Vektoren

Winkel Vektor/Gerade - Ebene

$$\alpha' = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n} \circ \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}\right)$$

$$90° - \alpha' = \alpha$$



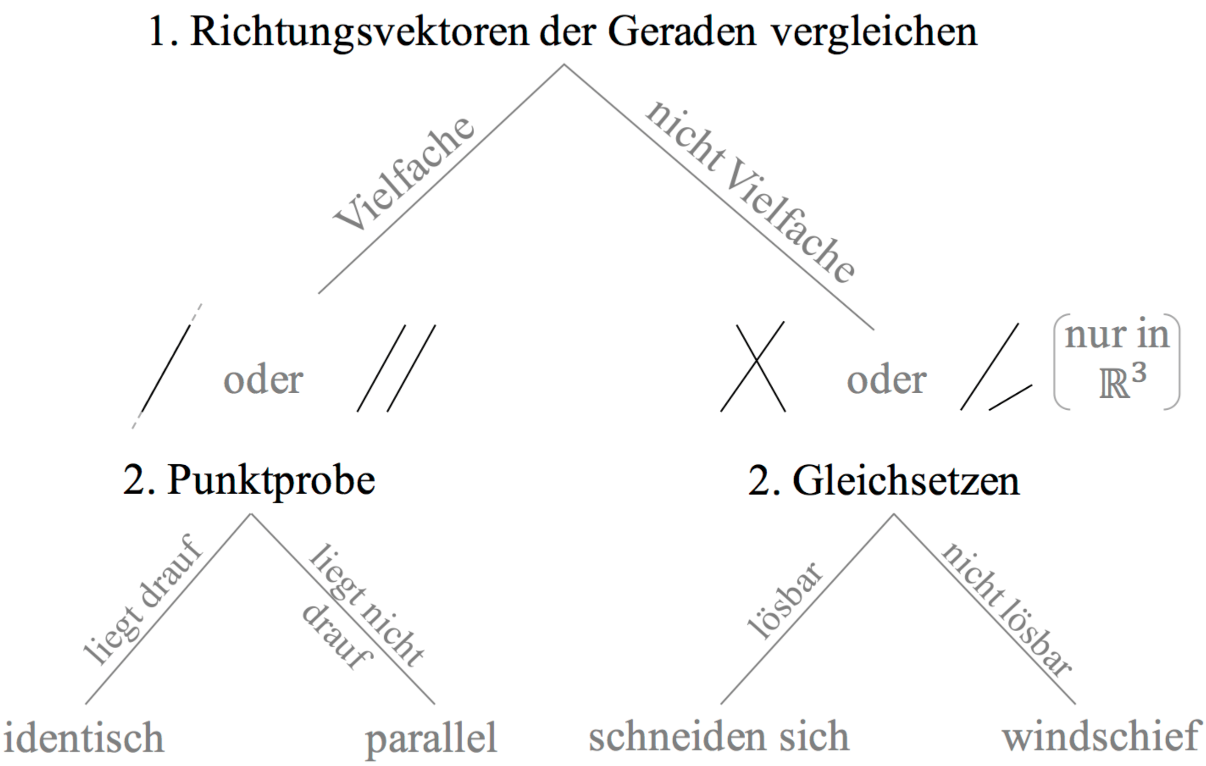
Durchstoßpunkt

1. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; und \; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
2. $E: n_1 x + n_2 y + n_3 z = a$
3. $E: n_1(x_1 + x_2 r) + n_2(y_1 + y_2 r) + n_3(z_1 + z_2 r) = a$
4. r berechnen
5. r in g einsetzen

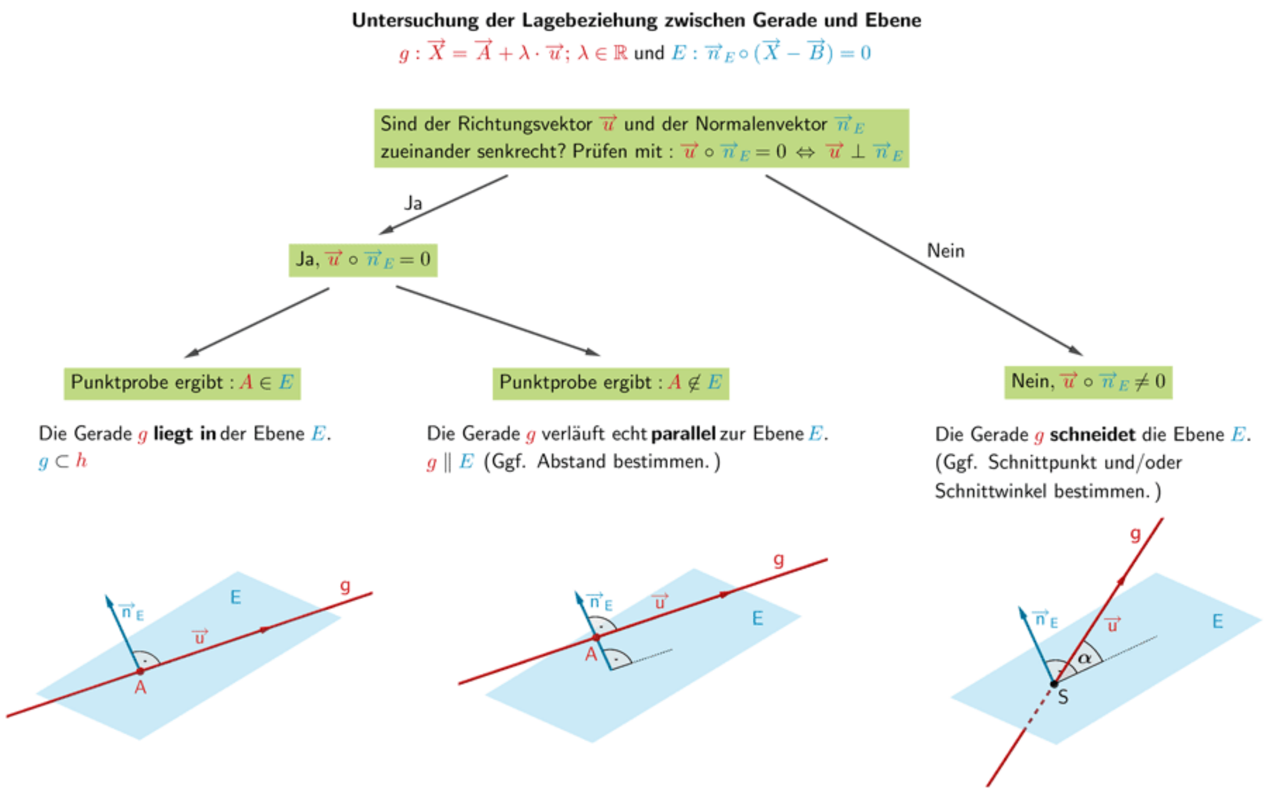
$$\boldsymbol{E = G}$$

Lagebeziehungen

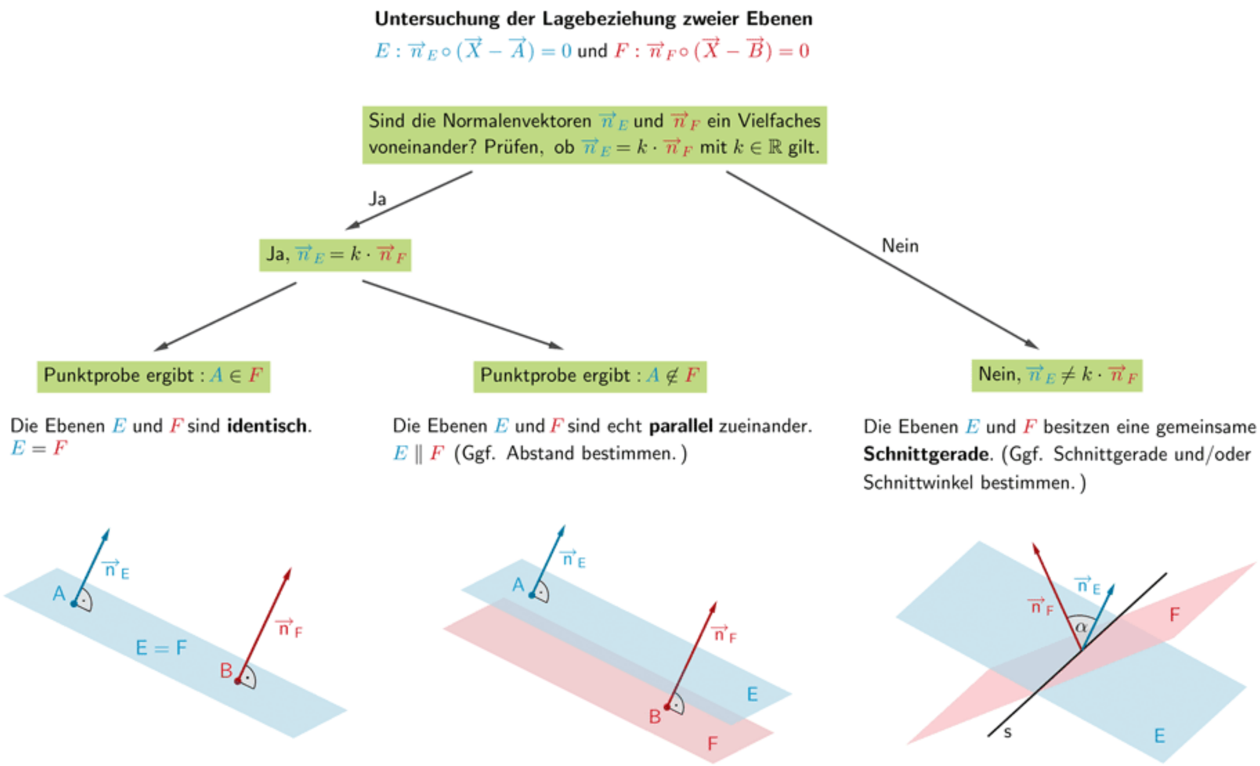
Gerade – Gerade



Gerade – Ebene



Ebene – Ebene



Abstände

Abstand Gerade-Gerade

1. Ebene aus Richtungsvektor von g1 und g2, so wie stütz Vektor von g1 bilden.
2. Jetzt ist es ein Ebenen Geraden Problem

Abstand Punkt-Gerade

1. Mann erstellt eine hifsebene die orthogonal zum richtungsvektor der gerade ist und den Punkt beinhaltet
2. Jetzt durchstoßpunkt mit gerade berechnen
3. Vektor zwischen punkten bilden
4. Betrag des Vektors errechnen

Abstand Punkt-ebene

1. Gerade aus dem Normalenvektor der Ebene und dem Punkt als Stützvektor der Gerade
2. Durchstoßpunkt ermitteln
3. Vektor bilden oder errechnen
4. Betrag des Vektors Bilden

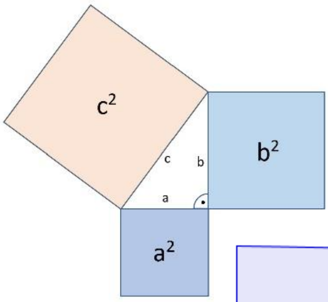
Spiegelung an Ebene

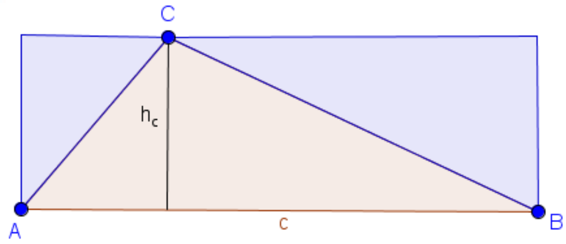
Trigonometrie

Seitenlängen und Flächen

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

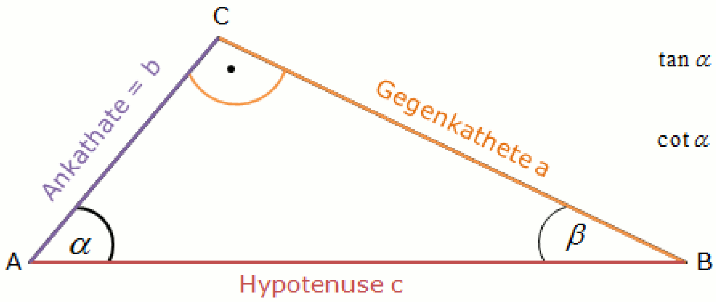
Fläche eines Dreiecks: $\frac{c \times h_c}{2} = A$





Bestimmung von Winkeln

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck



$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \sin\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha} = \frac{a}{b} = \cot\beta$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Gegenkathete von }\alpha} = \frac{b}{c} = \tan\alpha$$

Stochastik

Grundlagen Stochastik

Grundbegriffe der Stochastik

Ergebnismenge Ω:	Alle möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments
Ereignis:	Teilmenge von der Ergebnismenge Ω
Elementarereignis:	wenn die Teilmenge nur ein Element umfasst
Schnitt:	Menge der gemeinsamen Elemente der Menge $A \cap B$
Vereinigung:	Menge bestehend aus den Elementen, welche nur in der einen Menge, nur in der anderen und in beiden enthalten ist $A \cup B$
Komplement:	eine Lösungsmenge und dessen Komplement ergeben zusammen die Ergebnismenge Ω
Venn-Diagramm:	Diagramm zur Darstellung von Mengen
Laplace Experiment:	Alle Ergebnisse haben die selbe Wahrscheinlichkeit

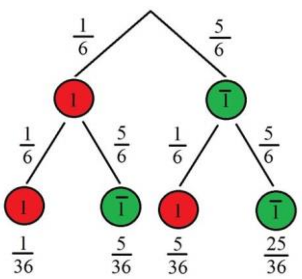
Laplace-Experiment

Das Würfeln eines „fairen" Würfels ist ein **Laplace-Experiment**.

- Man geht davon aus, dass es nur endlich viele Elementarereignisse gibt.
- Jedes Elementarereignis **e** soll mit derselben Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P(e) = \frac{1}{n}}$ auftreten.

Baumdiagramm

Beispiel:

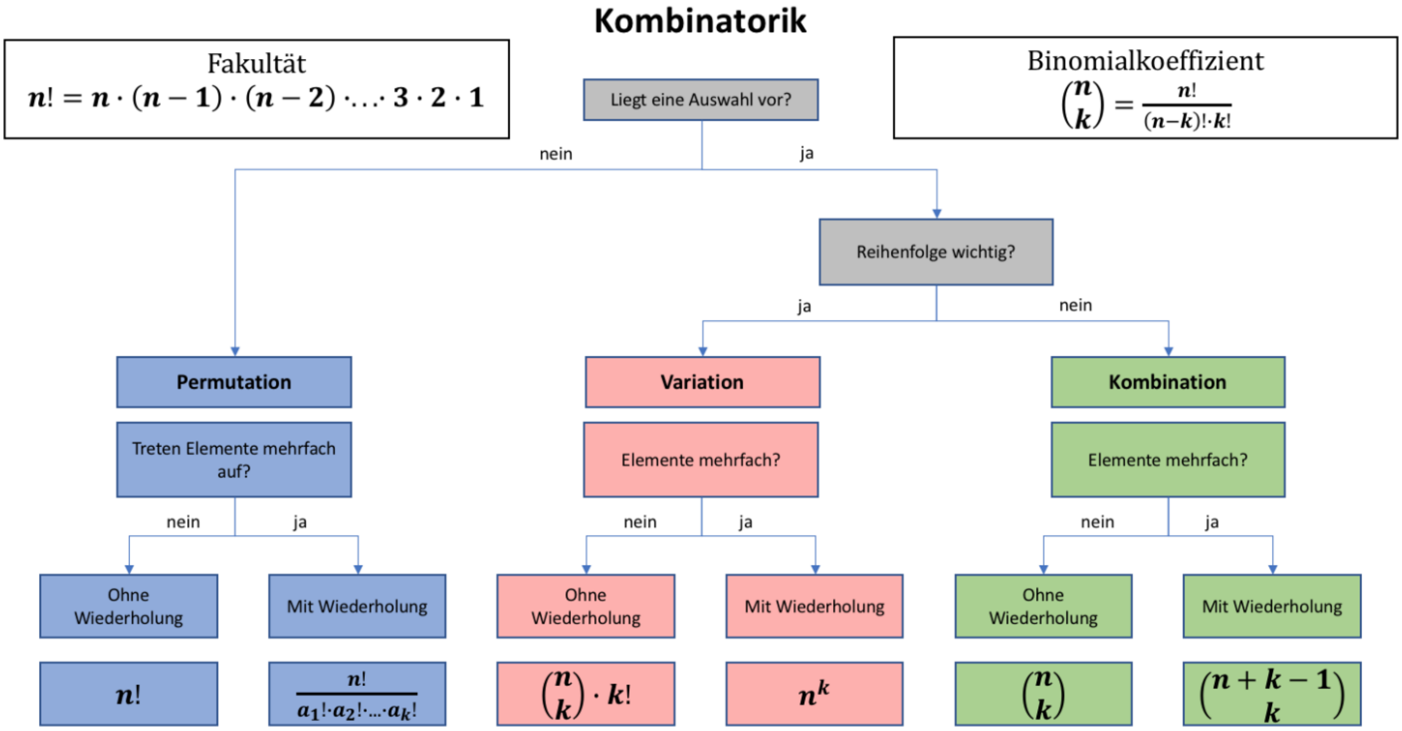


- innerhalb der Pfade Multiplizieren

- verschiedene Pfade mit einander Addieren

Kombinatorik

(Anzahl der möglichen Kombinationen)



Zufallsgrößen

Erwartungswert

Die an wahrscheinlichste erwartete Anzahl an erfolgen bei N versuchen

$\mu = N \ \times P$

Binominalverteilung

n= Anzahl versuche

k= Anzahl der erfolge

P= Wahrscheinlichkeit erflog

Formel von Bernulli

Berechnet die Wahrscheinlichkeit für einen Pfard anhand der n

Aufschreiben: $\boldsymbol{B_{p,n}(k) = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{n-k}}$

CAS : $\boldsymbol{BinomenalPDF(k, n, p)}$

Binomialverteilung

Voraussetzung:

- nur Erfolg und nicht Erfolg
- Jeder stufe des Experimentes hat gleiche Wahrscheinlichkeiten

Aufschreiben: $\boldsymbol{B_{p,n}(k_1 \leq x \geq k_2) = B_{p,n}(k_2) - B_{p,n}(k_1)}$

CAS : $\boldsymbol{BinomenalCDf(k_1, k_2, n, p)}$

Weiteres

Binomische Formeln

Hoch 2

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$

Hoch 3

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Quadratische Ergänzung

b wird quadratisch ergänzt und man bekommt q

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = q$$

Umformungsregeln

Brüche Umformen

$$\frac{a}{b} = a \times b^{-1}$$

Potenz und Wurzelgesetze

Vorbereitung für die Verallgemeinerung der Differentationsregeln

Aus den Potenzgesetzen lässt sich ableiten:

$$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$$

$Bsp. 1:$ $\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

$Bsp. 2:$ $\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$

Aus den Potenz- und Wurzelgesetzen lässt sich ableiten:

$$a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a}$$

$Bsp. 1:$ $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

$Bsp. 2:$ $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

Kombiniert man die Regeln für Wurzeln, negative und positive Potenzen ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a} \quad und \quad x^{-\frac{a}{b}} = \frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} \quad Bsp.: x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} \quad und \quad 3x^{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{\sqrt[5]{x^4}}$$